

*What is a wave ? A wave is motion. It is a noun that is secretly a verb.*

– Jon Mooallem

## 1 Propagation d'une onde

### 1.1 Notion d'onde

**Motivation** Un pavé lâché dans une mare, ça fait des vagues. L'eau soulevée est tirée vers le bas par la pesanteur mais à mesure qu'elle s'abaisse, elle pousse l'eau voisine vers le haut. L'eau ainsi élevée va à son tour s'écrouler, non sans entraîner l'eau adjacente, qui poursuivra le cycle, etc. Ainsi, la vague se déplace !

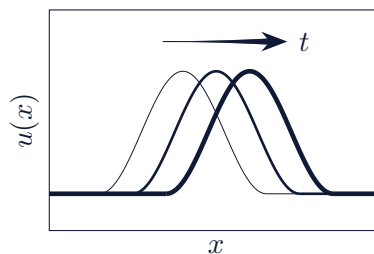
Quand on claque des doigts, on met rapidement en mouvement l'air autour de sa peau. Les particules d'air propulsées se heurtent promptement à leurs voisines et s'arrêtent donc. En revanche, les voisines en question sont accélérées par le choc, et collisionneront à leur tour avec les particules adjacentes, les mettant ainsi en mouvement, etc. Ce qu'on a décrit, c'est la propagation du son !

**Définition d'une onde** Dans ces deux exemples, un événement a perturbé un milieu initialement au repos et le mouvement s'est propagé de proche en proche (de voisin en voisin). Cette perturbation s'est faite sans transport de masse : même si c'est contre-intuitif, l'eau dans une vague ne fait, en gros, que se soulever et s'abaisser mais ne se déplace pas horizontalement (ce ne sont pas les mêmes particules d'eau qui composent la vague d'un instant à l'autre).

Le même principe se retrouve dans de nombreuses situations physiques, si bien qu'on donne un nom à ce genre de mouvements :

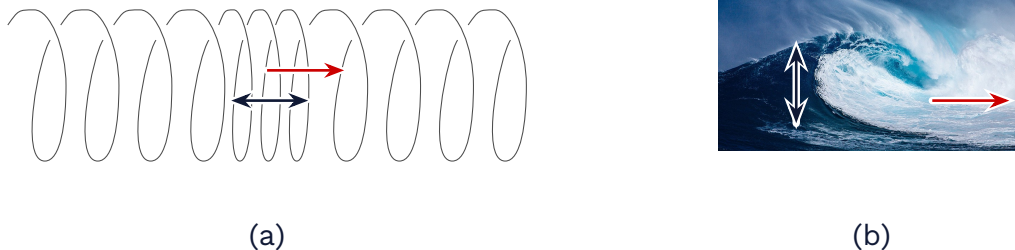
#### Définition 1 : Onde et célérité

Une *onde* est une perturbation d'un milieu se propageant de proche en proche sans transport de matière. Une onde qui ne se déforme pas a une vitesse bien définie : on l'appelle *célérité* et on la note généralement  $c$ . On l'exprime en mètres par seconde.



**Figure 1** – Une vague à la surface de l'eau se propage : à chaque instant, elle est reproduite à l'identique mais décalée dans l'espace. C'est donc une onde. Après un temps  $\Delta t$ , elle aura parcouru une distance  $\Delta x = c\Delta t$ , où  $c$  est sa célérité. La notation  $u$  désigne la hauteur de la surface de l'eau.

**Classifications et exemples** Le son est une *onde acoustique*. On dit que c'est une *onde longitudinale* car le mouvement des particules se fait dans la même direction que la propagation. En revanche, une vague est une *onde transverse* car le mouvement de l'eau (de haut en bas) est perpendiculaire à la direction de propagation (le long de l'étendue d'eau). Dans l'air à température et pression ambiantes, le son se propage à  $\approx 340 \text{ m s}^{-1}$ , mais bien plus vite dans l'eau, à  $\approx 1500 \text{ m s}^{-1}$ .



**Figure 2** – (a) Une onde se propageant le long d'un ressort « slinky » est longitudinale : la direction du mouvement (flèches noires) est parallèle à la direction de propagation (flèche rouge). (b) Une vague est une onde transversale : la direction du mouvement de la matière (flèches noires) est perpendiculaire à celle de propagation (flèche rouge).

La lumière est une onde électromagnétique. Dit comme ça, c'est assez mystérieux, mais on n'a pas besoin de comprendre précisément ce qu'est un champ électrique ou magnétique pour étudier la lumière : il suffit de savoir que c'est une onde pour prédire plein de phénomènes différents ! Dans le vide, la lumière se propage à  $c_0 \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , une constante fondamentale de la physique (souvent simplement notée  $c$ ). Dans un matériau, la célérité de la lumière devient une certaine fraction de sa valeur dans le vide, à savoir  $c_0/n$ , où  $n$  est par définition l'*indice de réfraction* (ou *indice optique*) du matériau en question. On a toujours  $n \geq 1$  (rien ne se déplace plus vite que la lumière dans le vide), et quelques ordres de grandeur sont  $n_{\text{air}} \approx 1$ ,  $n_{\text{eau}} \approx 1,33$ ,  $n_{\text{verre}} \approx 1,5$ .

Il y a encore plein, plein de types d'ondes. Des ondes peuvent se propager dans un câble électrique, il y a les ondes sismiques, les ondes gravitationnelles... Et même si on ne sait pas ce que c'est, on va quand même pouvoir décrire une bonne partie de leurs comportements dans ce cours !

## 1.2 Ondes harmoniques

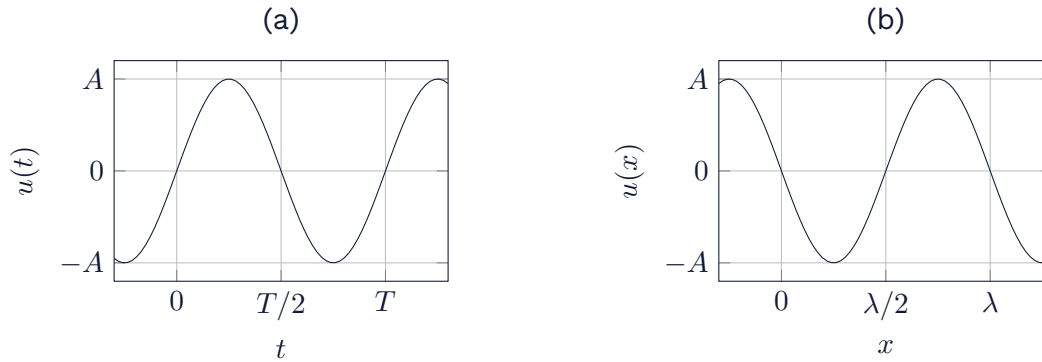
### Définition 2 : Onde harmonique

Une onde *périodique* est une onde qui se répète à l'identique dans le temps et l'espace. Une onde *harmonique* (ou *sinusoïdale*) est une onde périodique dont la forme est celle de la fonction sinus.

Notons que si une onde est périodique dans l'espace, elle l'est automatiquement aussi dans le temps.

**Notion d'onde harmonique** Dans la figure 3, où est représentée une onde harmonique, on a tracé la forme de l'onde, caractérisée par une grandeur  $u(x, t)$ , qui dépend de la position et du temps. La signification de cette grandeur dépend de l'onde en question : pour une vague, c'est la hauteur de la surface de l'eau, pour une onde acoustique, on peut définir  $u$  comme la pression du milieu, pour la lumière, il s'agit d'une des composantes du fameux champ

électromagnétique... Là encore, pas besoin de savoir précisément ce que veut dire  $u$  ! Le plus facile à imaginer dans sa tête, c'est souvent le cas d'une vague.

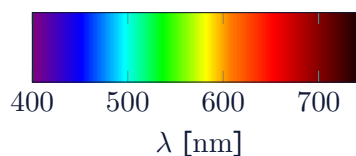


**Figure 3** – Une onde harmonique représentée : (a) en fonction du temps en un point fixé, et (b) en fonction de l'endroit en un instant fixé.

La figure 3 permet aussi de définir quelques grandeurs utiles pour parler des ondes harmoniques. La *période* temporelle de l'onde est  $T$ , il s'agit de la durée minimale qu'il faut attendre avant que l'onde ne se répète. Sa période spatiale, plus souvent appelée *longueur d'onde* est  $\lambda$ , c'est la taille du motif qui se répète. La *fréquence* de l'onde est  $f = 1/T$ , elle s'exprime en hertz (si  $T = 1$  s, alors  $f = 1$  Hz). On définit aussi la *pulsation*  $\omega = 2\pi f$  (si  $f = 1$  Hz, alors  $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$ ) et le *nombre d'onde*  $k = 2\pi/\lambda$  mais ces définitions ne seront pas utiles dans ce cours. Finalement,  $A$  est l'amplitude de l'onde, ses unités sont les mêmes que celles de  $u$ .

**Importance des ondes harmoniques** Tout ça, c'est bien beau, mais pourquoi est-ce qu'on s'intéresse particulièrement aux ondes harmoniques ? Déjà, parce qu'en général, une onde ça peut ressembler à tout et n'importe quoi, et qu'il faut bien mettre un peu d'ordre là-dedans. Parfois, la célérité peut même dépendre de la fréquence de l'onde : considérer une onde harmonique est donc le choix le plus simple possible à traiter.

Dans le cas particulier de la lumière, une onde harmonique correspond à de la lumière d'une seule couleur : on parle d'onde *monochromatique*. La couleur en question dépend de la longueur d'onde : il faut retenir que le bleu se situe autour de  $\lambda \sim 400$  nm, que le rouge est vers  $\lambda \sim 700$  nm et qu'entre les deux se situent le vert, le jaune et l'orange. Les longueurs d'onde plus faibles que celles du bleu sont qualifiées d'*ultraviolet*, celles plus grandes que celles du rouge d'*infrarouge*. Elles ne sont pas visibles à l'œil nu mais se propagent selon le même principe physique que la lumière visible.



**Figure 4** – Spectre électromagnétique visible.

Quant au son, une onde harmonique correspond à un son « pur », proche de celui produit par un diapason. Une fréquence élevée correspond à un son aigu, et réciproquement une fréquence basse correspond à un son grave : l'oreille humaine perçoit les fréquences comprises entre

20 Hz et 20 kHz environ. Une fréquence plus basse que  $\sim 20$  Hz ne sera plus perçue comme un son continu, mais comme un rythme !

**Relation de dispersion** La longueur d'onde et la période d'une onde harmonique ne sont pas indépendantes. En effet, on sait qu'une onde harmonique reproduit sa forme dans l'espace après un temps  $T$ . Mais pendant ce temps, elle a simplement bougé d'une distance  $cT$  : il faut donc que l'onde soit identique si on la translate de  $cT$ , c'est-à-dire que  $cT$  soit égal à la longueur d'onde. Ainsi, on a

$$\lambda = Tc \text{ ou encore } c = \lambda/T = \lambda f = \omega/k. \quad (1)$$

Cette équation est appelée *relation de dispersion*. Lorsque la propagation de l'onde suit des processus plus compliqués que ceux auxquels on se limite ici, la célérité peut dépendre de  $\lambda$ . Quand  $c$  ne dépend pas de  $\lambda$ , on dit que le milieu de propagation est *non-dispersif* : ce sera toujours le cas dans ce cours.

### 1.3 Effet Doppler

Arrêtons-nous un instant pour nous demander ce qui se passe lorsqu'un émetteur d'ondes se déplace dans l'espace. C'est un cas souvent rencontré en pratique et une bonne façon de s'assurer qu'on a bien tout compris jusque là. Par exemple, considérons une ambulance dont la sirène est allumée alors qu'elle se déplace : mettons que vous êtes immobiles sur le bord de la route et que le véhicule arrive vers vous à la vitesse  $v_{\text{ém}}$ .

L'ambulance émet du son à une fréquence  $f_{\text{ém}}$ . La vitesse du son dans l'air au repos est  $c$  mais du point de vue de l'ambulance, l'air s'approche à une vitesse  $v_{\text{ém}}$  : relativement à l'ambulance, le son a une célérité  $c - v_{\text{ém}}$ . La longueur d'onde émise est donc  $\lambda = (c - v_{\text{ém}})/f_{\text{ém}}$ . Par ailleurs, vous entendez une fréquence  $f_{\text{reç}}$  telle que  $\lambda = c/f_{\text{reç}}$ . Ainsi,  $f_{\text{reç}} = f_{\text{ém}}/(1 - v_{\text{ém}}/c) > f_{\text{ém}}$  : vous entendez l'ambulance plus aigue qu'elle n'émet ! Quand elle s'éloigne, c'est l'inverse : ça revient à compter  $v_{\text{ém}}$  négativement, et le son reçu est donc plus grave.



**Figure 5** – Effet Doppler : l'émetteur (ambulance) a une vitesse  $v_{\text{ém}}$  et le récepteur une vitesse  $v_{\text{reç}}$ . Lorsque seul l'émetteur est mobile,  $v_{\text{reç}} = 0$ .

Souvent, la vitesse de l'émetteur est faible par rapport à la célérité de l'onde : on note  $v_{\text{ém}} \ll c$ . Sous cette condition, on peut faire l'approximation  $1/(1 - v_{\text{ém}}/c) \approx 1 + v_{\text{ém}}/c$ , qui rend les calculs avec l'effet Doppler plus simples<sup>1</sup>.

Un cas plus général à traiter est celui où émetteur et récepteur sont tous deux en mouvement : dans ce cas, il faut se souvenir que la longueur d'onde reçue est la même que la longueur d'onde émise (une longueur est indépendante du référentiel). On a donc

$$\frac{c - v_{\text{ém}}}{f_{\text{ém}}} = \lambda_{\text{ém}} = \lambda_{\text{reç}} = \frac{c - v_{\text{reç}}}{f_{\text{reç}}}. \quad (2)$$

Cette formule ressemble beaucoup à l'équation 3 ! Le signe des vitesses est un peu subtil (il est compté selon l'axe émetteur  $\rightarrow$  récepteur). En cas de doute, on peut imaginer le bruit

1. Cette approximation est un cas particulier de la formule  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$  lorsque  $|\varepsilon| \ll 1$ . Le cas pour Doppler revient à poser  $n = -1$  et  $\varepsilon = v_{\text{ém}}/c$ .

d'une ambulance ou d'une voiture de course, ou bien dessiner un canard sur un lac : les vagues devant lui sont plus resserrées que derrière lui. D'une manière générale, c'est toujours important de vérifier qu'une formule prédit des résultats raisonnables (par exemple,  $f_{\text{reç}} > f_{\text{ém}}$  lorsque l'ambulance s'approche de l'observateur au repos).



**Figure 6** – Aides mémoire pour le signe des vitesses dans la formule de l'effet Doppler.

L'effet Doppler peut être utilisé pour mesurer la vitesse d'un objet : en envoyant une onde dessus, on peut mesurer la fréquence de l'onde réfléchiée et en déduire la vitesse. Ce principe est par exemple utilisé pour mesurer la vitesse du sang avec une onde sonore (« échographie Doppler »). Attention, dans ces situations, l'effet Doppler intervient deux fois. En effet, lors de la réflexion, l'onde est d'abord reçue par l'objet mobile puis réémise par le mobile, qui agit donc successivement comme récepteur puis comme émetteur.

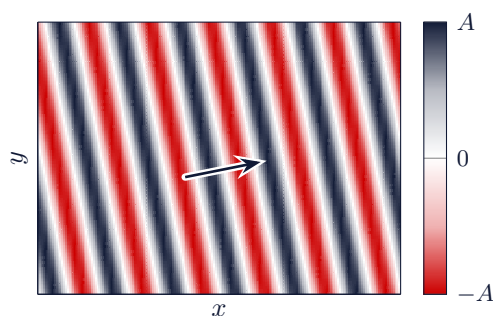
## 1.4 Propagation en 2D ou 3D

Pour le moment, on n'a considéré que des ondes dans un monde à une dimension : sur la figure 1, l'onde se propage vers la droite et ne peut pas changer de direction. Dans notre monde à trois dimensions, ou sur la surface en deux dimensions d'une mare, c'est un peu plus compliqué.

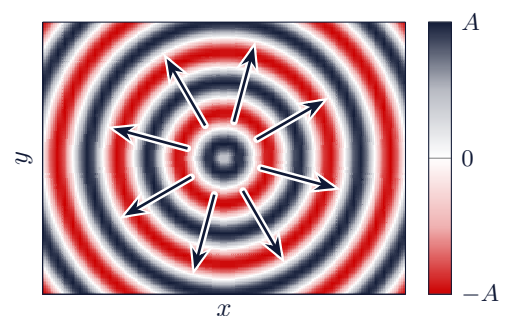
**Quelques formes d'ondes** Le cas le plus simple à traiter, c'est une *onde plane*.

### Définition 3 : Onde plane

Une *onde plane* est une onde qui ne varie que selon une direction. Elle se propage en ligne droite le long de cette direction, sans se déformer.



**Figure 7** – « Champ d'onde » d'une onde plane. La couleur correspond à la valeur de la grandeur  $u$  en chaque point  $(x, y)$  de l'espace. La figure est dessinée à un instant fixé.



**Figure 8** – Une source ponctuelle qui envoie des ondes de manière égale dans toutes les directions donne lieu à des ondes circulaires (en 2D) ou sphériques (en 3D).

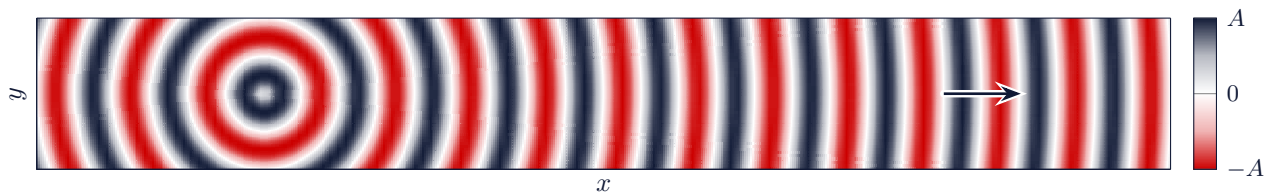
Sur la figure 7, on a représenté une onde plane dans un monde en deux dimensions, par exemple une vague sur une mare. Dans cet exemple, les régions rouges correspondent alors à

des endroits où la vague est basse (donc  $u$  est négatif), et les régions noires à des endroits où elle est haute (donc  $u$  est positif). L'onde se déplace en ligne droite.

Les exemples donnés en introduction (le pavé dans la mare, le claquement de doigts) correspondent plutôt à des *sources ponctuelles* (figure 8), c'est-à-dire à des points dans l'espace qui émettent des ondes dans toutes les directions. Sur la figure, il faut imaginer que les ondes se déplacent radialement, vers l'extérieur.

La question, maintenant, c'est : comment déterminer la direction dans laquelle se propage une onde lorsqu'elle n'est ni plane ni circulaire ?

**Notion de rayon** Il y a un certain nombre de façons de répondre à cette question selon le niveau de précision voulu<sup>2</sup>. On va se contenter d'y répondre loin des obstacles ou des sources.



**Figure 9** – Lorsque la distance à une source ponctuelle est grande par rapport à la longueur d'onde, les ondes émises ressemblent à des ondes planes.

Ce qu'on voit en figure 9, c'est que loin de la source ponctuelle, on a en gros des ondes planes dans chaque direction, qui se propagent en ligne droite. L'idée qui va nous simplifier la vie, c'est donc de dire la chose suivante :

#### Définition 4 : Rayon

Étant donné une onde qui se propage dans l'espace, on appelle *rayon* une courbe dont la direction en chaque point donne la direction de propagation de l'onde en ce point.

#### Propriété 1 : Optique géométrique

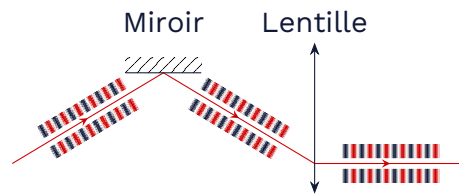
Lorsque la taille des obstacles que rencontre une onde est bien plus grande que sa longueur d'onde, l'*optique géométrique* prédit la forme des rayons dans l'espace. Ils forment des lignes droites en l'absence d'obstacles, se réfléchissent et se réfractent selon les lois de Snell-Descartes, se focalisent à la sortie d'une lentille convergente, etc.

C'est super, parce qu'on peut réutiliser plein de résultats de l'optique géométrique pour comprendre grossièrement comment les ondes se propagent, et qu'on a pas besoin de s'embêter avec la fréquence ou la longueur d'onde lorsqu'on détermine la forme des rayons. D'ailleurs, on peut très bien faire des calculs d'optique géométrique sans savoir que la lumière est une onde, comme c'était le cas historiquement !

On peut donc compléter l'image qu'on se fait de la lumière comme de rayons en comprenant que chacun de ces rayons décrit en fait l'onde lumineuse autour de lui :

Notons que même si le mot de « rayons » et d'« optique géométrique » sont empruntés à l'optique, ces raisonnements sont valables pour n'importe quel type d'ondes ! Dans ce cours, on

<sup>2</sup>. Par exemple, il existe le principe de Huygens-Fresnel. Si ça vous intéresse, attention : la page Wikipédia en français est un peu mystique, on préférera regarder celle en anglais ou une autre ressource.



**Figure 10** – L’optique géométrique permet de prédire la direction de propagation des ondes lorsqu’elle rencontre des obstacles bien plus grands que sa longueur d’onde.

va admettre les lois de l’optique géométrique, qui seront étudiées plus tard, et se concentrer sur deux aspects que l’optique géométrique ne décrit pas :

- ce qui se passe quand les obstacles ne sont pas très grands par rapport à la longueur d’onde, comme lorsqu’on fait passer de la lumière dans un tout petit trou,
- et ce qui se passe quand on combine plusieurs rayons entre eux.

Un dernier point utile s’impose avant de réfléchir à ces questions.

**Changements de milieu** Lors du passage d’un milieu à l’autre, par exemple de l’air d’indice  $n_{\text{air}}$  à l’eau d’indice  $n_{\text{eau}}$ , l’optique géométrique prédit qu’une partie de l’onde incidente sera réfléchiée et une autre partie transmise (c’est-à-dire réfractée). Toutes ces ondes sont à la même fréquence. En revanche, comme la vitesse de propagation change selon les milieux, la longueur d’onde transmise  $\lambda_{\text{eau}}$  sera différente de la longueur d’onde incidente  $\lambda_{\text{air}}$  :

$$\frac{c_0}{n_{\text{air}}\lambda_{\text{air}}} = f_{\text{air}} = f_{\text{eau}} = \frac{c_0}{n_{\text{eau}}\lambda_{\text{eau}}} . \quad (3)$$

Là encore, ces conclusions sont vraies pour la lumière comme pour le son, par exemple, à condition de remplacer par les célérités appropriées :  $c_{\text{air}}/\lambda_{\text{air}} = c_{\text{eau}}/\lambda_{\text{eau}}$ .



## 2 Interactions entre deux ondes

### 2.1 Principe de superposition

On va commencer à s'amuser : à partir de maintenant, on va regarder l'effet d'avoir plusieurs ondes harmoniques au même endroit. Pour le moment, supposons qu'elles ont la même fréquence et donc aussi la même longueur d'onde.

Dans de nombreux cas, la grandeur  $u$  qu'on a tracée dans les figures s'ajoute d'une onde à l'autre : par exemple, la pression en présence de deux ondes est la somme de la pression en présence de chacune des ondes. Mais comme  $u$  varie avec l'espace, on ne peut pas simplement ajouter les amplitudes : selon la position relative des minima et des maxima de chaque onde, on aura des comportements différents. En général, il faut faire l'addition de fonctions sinus à la main, avec des relations trigonométriques. Ça devient rapidement prise de tête, et surtout c'est superflu dans beaucoup de situations : on se contentera des deux cas suivants.

#### Définition 5 : Coïncidence et opposition de phase

Deux ondes sinusoïdales présentes au même point sont dites *en phase* lorsque leurs maxima apparaissent aux mêmes instants, et en *opposition de phase* lorsque les maxima de l'un apparaissent aux mêmes instants que les minima de l'autre.

#### Propriété 2 : Principe de superposition

Lorsque deux ondes (ou plus) sont présentes au même point, leurs perturbations  $u$  s'ajoutent. En particulier, pour des ondes harmoniques de même amplitude, on a *interférence constructive* lorsqu'elles sont en phase et il en résulte une perturbation sinusoïdale d'amplitude maximale, et *interférence destructive* lorsqu'elles sont en opposition de phase et il en résulte une perturbation nulle (voir figure 11).

Le but du jeu à partir de maintenant, ça va être de déterminer les endroits où il y a interférence constructive et destructive dans un certain nombre de situations typiques.

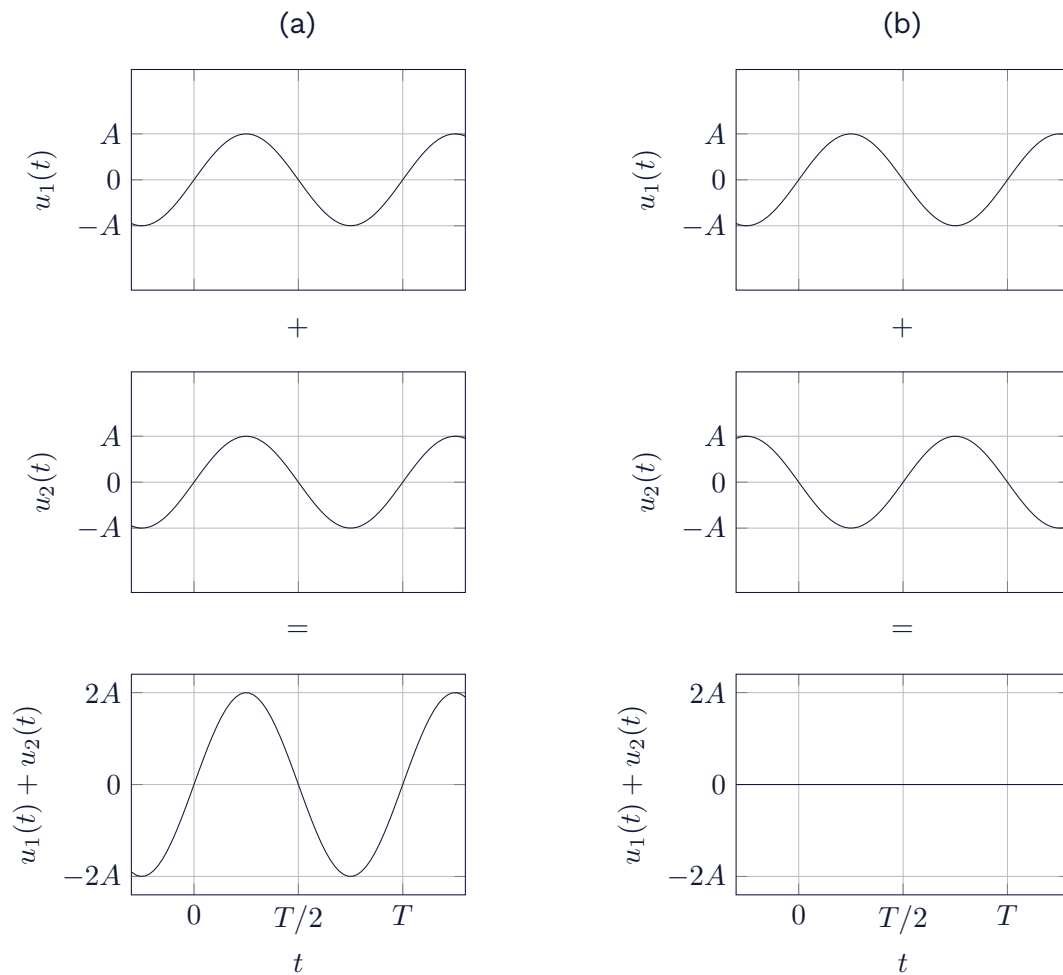
### 2.2 Notion de différence de marche

Dans l'entièreté des situations que l'on considèrera, les deux ondes qui interfèrent proviennent de la même source mais suivent des chemins différents avant de se rejoindre en un même point. Théoriquement, rien n'interdit d'appliquer le principe de superposition à des ondes provenant de sources différentes, mais un certain nombre de difficultés expérimentales rendent rares les situations où c'est effectivement possible. En deux mots, il faut arriver à « synchroniser » assez précisément les sources : on parle alors de sources *cohérentes*<sup>3</sup>. Plus de détails sur ces problèmes en partie 5.

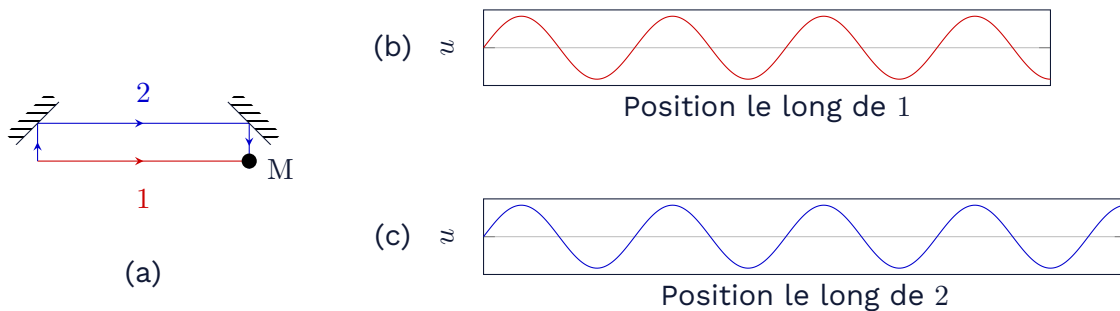
Les ondes ayant parcouru deux chemins de longueurs différentes sont en général *déphasées* : leurs maxima et minima n'apparaissent pas aux mêmes instants. Sur la figure 12, on a montré un exemple où deux ondes arrivent au point M par deux chemins différents. Un des chemins est légèrement plus grand que l'autre, de sorte que l'onde qui arrive par le chemin 1 est à son minimum en M et celle qui passe par le chemin 2 est à son maximum en 2. Ainsi, les ondes sont en opposition de phase en M et l'interférence sera destructive.

3. On se souviendra des paroles de *Poetic Justice* de Kendrick Lamar : « *I want that interference, it's coherent, I can hear it.* » Si les sources ne sont pas cohérentes, on n'entendra pas d'interférence.





**Figure 11** – Principe de superposition. (a) Interférence constructive lorsque les ondes sont en phase. (b) Interférence destructive lorsque les ondes sont en opposition de phase.



**Figure 12** – (a) Deux rayons passant par des chemins différents pour atteindre un même point. (b) Forme de l'onde le long du chemin 1 en un instant donné. (c) Forme de l'onde le long du chemin 2, plus long que le chemin 1, au même instant.

Dans cet exemple, on voit sur les graphes de la figure 12 que la différence de longueur des chemins vaut  $\lambda/2$ . En général, la méthode est donc de calculer la *différence de marche*  $\delta$ , définie comme la différence des longueurs parcourues par chaque rayon. Si  $\delta$  vaut un nombre entier de longueurs d'ondes, les maxima et les minima de chaque onde apparaîtront en même temps : elles seront en phase, et l'interférence sera constructive. À l'inverse, si  $\delta$  vaut un

nombre entier de longueurs d'ondes plus une demi longueur d'onde, comme sur la figure 12, les maxima d'une onde apparaîtront en même temps que les minima de l'autre : elles seront en opposition de phase, et l'interférence sera destructive.

On peut résumer ces conclusions avec la méthode fondamentale suivante :

### Méthode 1 : Déterminer si une interférence est constructive

Pour savoir si une interférence est constructive, on calcule la distance parcourue par chaque rayon, puis on en fait la différence pour obtenir la différence de marche  $\delta$ . Alors, on calcule l'ordre d'interférence  $p$  défini par

$$p = \frac{\delta}{\lambda}. \quad (4)$$

Les interférences sont **constructives** lorsque  $p \in \mathbb{Z}$  et **destructives** lorsque  $(p - \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}$ .

Parfois, l'appellation « demi-entier » est utilisée pour désigner un nombre  $p$  valant un entier et demi, c'est-à-dire tel que  $(p - \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}$ .

## 2.3 Rayons traversant plusieurs milieux

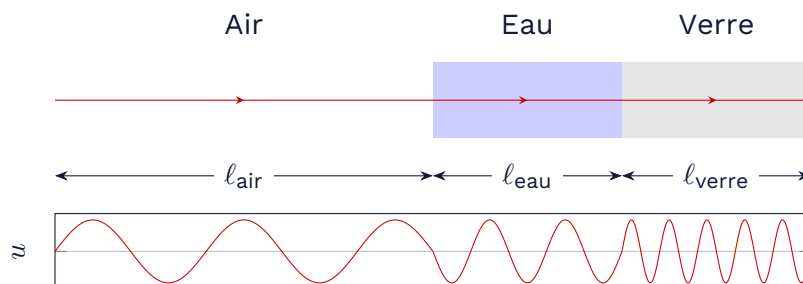
La méthode qu'on vient de mettre en place couvre beaucoup de cas, mais pas celui où l'onde change de milieu au cours de sa propagation. Pour comprendre ce cas, on va se focaliser sur l'exemple de la lumière, mais la méthode s'applique aussi aux autres ondes.

Lorsqu'une onde change de milieu, on a vu qu'elle garde la même fréquence mais change de longueur d'onde. On ne peut donc pas écrire  $p = \delta/\lambda$  si il y a plusieurs milieux, puisqu'on ne sait pas de quel  $\lambda$  on parle ! Il faudrait former le rapport  $\Delta\ell/\lambda$  dans chaque milieu, puis sommer toutes ces différences pour avoir  $p$ .

Or, comme on voit grâce à la relation 3, la longueur d'onde  $\lambda_a$  dans un milieu « a » d'indice optique  $n_a$  est donnée en fonction de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  par  $\lambda_a = \lambda_0/n_a$  puisque le vide a un indice optique égal à 1. Donc  $p$  est la somme des rapports  $n_a \Delta\ell_a/\lambda_0$ , où  $\Delta\ell_a$  est la différence des longueurs parcourus par les rayons dans le milieu « a ».

On définit le *chemin optique*  $\mathcal{L}$  comme la longueur parcourue par un rayon multipliée par l'indice optique du milieu dans lequel il évolue.

Par exemple, dans la figure 13, l'onde traverse successivement une épaisseur  $\ell_{\text{air}}$  d'air,  $\ell_{\text{eau}}$  d'eau puis  $\ell_{\text{verre}}$  de verre. Son chemin optique vaut donc  $n_{\text{air}}\ell_{\text{air}} + n_{\text{eau}}\ell_{\text{eau}} + n_{\text{verre}}\ell_{\text{verre}}$ .



**Figure 13** – Un rayon traversant plusieurs milieux et la forme de l'onde le long de la propagation. Le changement de longueur d'onde est exagéré pour être clairement visible.

On a donc une nouvelle méthode :

### Méthode 2 : Calculer un chemin optique

Pour calculer le chemin optique parcouru par un rayon, on fait la somme de la longueur du rayon dans chaque milieu multiplié par l'indice de réfraction de ce milieu.

Ainsi, on a

$$\mathcal{L} = n_a \ell_a + n_b \ell_b + \dots \quad (5)$$

En présence de deux ondes, la différence de marche vaut  $\delta = \Delta \mathcal{L}$  et l'ordre d'interférence est  $p = \delta / \lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans un milieu d'indice  $n = 1$ .

## 2.4 Notion de figure d'interférence

Pour résumer, lorsque deux ondes se superposent dans l'espace, l'amplitude de la perturbation résultante varie selon le point qu'on regarde. Certains points, appelés *ventres* ou *taches lumineuses* dans le cas de la lumière, auront une grande amplitude, le résultat d'interférences constructives, tandis que d'autres points, appelés *nœuds* ou *taches sombres* dans le cas de la lumière, auront une perturbation tout à fait nulle, le résultat d'interférences destructives. On pourra désigner les ventres par leur ordre  $p$  (on parlera de « tache lumineuse d'ordre 1 » par exemple). Les points intermédiaires auront une certaine amplitude, ni nulle ni maximale, que l'on ne cherchera pas à calculer.

### Définition 6 : Figure d'interférence

La disposition spatiale des ventres et des nœuds résultant de la superposition d'au moins deux ondes est appelée *figure d'interférences*.

Dans la plupart des cas, l'effet le plus frappant est la présence des nœuds. Par exemple, dans le cas de lumière visible, la fréquence de l'onde est bien plus grande que celle que nos yeux peuvent percevoir : en prenant  $\lambda \sim 600 \text{ nm}$  au milieu du spectre visible, on trouve  $f = c_0 / \lambda = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$  ! Notre œil perçoit donc la lumière comme une quantité qui semble constante dans le temps, alors qu'elle oscille en fait très vite. La luminosité apparente variera d'un point à l'autre selon l'amplitude des oscillations s'y trouvant. S'il est difficile de localiser les maxima de luminosité à l'œil, où sont situés les ventres, il est en revanche simple de déterminer la position des nœuds : la lumière y est absente, comme effacée par un mystère dont la solution réside dans le caractère ondulatoire de la lumière, le seul à même d'expliquer les figures d'interférences.

Pour aller plus loin (c'est du bonus), on peut définir l'*intensité lumineuse*  $\mathcal{I}$  en un point M en effectuant mathématiquement l'opération que notre œil calcule involontairement par son incapacité à résoudre les variations fabuleusement rapides de la lumière : un moyennage temporel du carré de la perturbation,  $\mathcal{I}(M) = \langle u(M, t)^2 \rangle$ . Sans rentrer dans le détail, on peut retenir que pour une onde harmonique seule,  $\mathcal{I} = A^2/2$ . Il existe une formule, qui n'est pas à connaître, qui donne l'intensité résultant de la superposition de deux ondes de même intensité  $\mathcal{I}_0$  en un point où leur différence de marche est  $\delta$  : il s'agit de la formule de Fresnel<sup>4</sup>,  $\mathcal{I}(M) = 2\mathcal{I}_0(1 + \cos(2\pi\delta/\lambda))$ . Cette formule permet de retrouver les cas particuliers des ventres, où le cosinus vaut 1, et des nœuds, où il vaut -1.

4. Fresnel (1788-1827) était un physicien français qui a notamment étudié l'optique dans le phare de Cordouan.

### 3 Trous d'Young

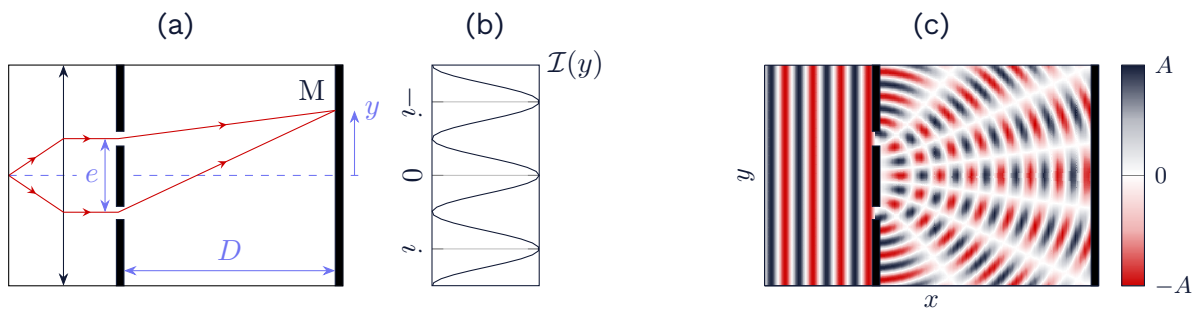
#### 3.1 Présentation

Un exemple commun de figure d'interférence, c'est le montage des *trous d'Young*. L'idée est d'envoyer un laser, c'est-à-dire une source monochromatique, sur un écran percé de deux petits trous.

Comme ces trous ne sont pas grands par rapport à la longueur d'onde, l'optique géométrique n'est pas une approximation valide en leur proximité. À la place, on va considérer que les trous sont tellement petits qu'ils agissent quasiment comme deux sources ponctuelles, qui envoient de la lumière dans toutes les directions. On précisera cette hypothèse en partie 5.2.

En ajoutant un écran loin des trous, on pourra observer la figure d'interférence sous la forme de taches lumineuses sur l'écran. En pratique, on ajoute une lentille avant les trous pour collimater le faisceau lumineux mais ce n'est pas très important pour les calculs théoriques : ce qui compte, c'est que la lumière qui passe par chaque trou soit en phase.

Il ne faut pas se leurrer : les rayons issus des trous interfèrent dans tout l'espace à droite des trous, pas seulement sur l'écran. Celui-ci n'est inclus que pour voir les interférences dans la vraie vie, de la même manière qu'on ne voit pas le rayon d'un pointeur laser de diaporama mais qu'on voit la tache qu'il forme sur un écran. C'est très clair sur la figure 14(c), qui montre le champ d'ondes en un instant donné : on voit bien les nœuds, qui sont les lignes blanches émergeant des trous. Notre but est d'expliquer la présence de ces lignes.



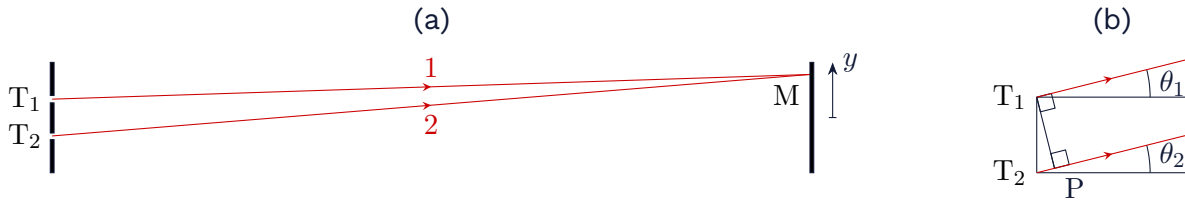
**Figure 14** – (a) Montage des trous d'Young. Après le passage des trous, des rayons émergent dans toutes les directions : on ne trace que ceux qui atteignent un point donné M sur l'écran. (b) Intensité observée au point M en fonction de sa position sur l'écran  $y$ . (c) Champ d'ondes pour les trous d'Young. On ne montre pas la lentille, placée à gauche du domaine tracé.

#### 3.2 Calcul de la différence de marche

Considérons ainsi un point M sur l'écran, repéré par la coordonnée  $y$  (figure 14(a)). Un rayon émergeant de chaque trou atteint le point M, de sorte que notre tâche est de calculer la différence de marche entre ces rayons. On s'intéresse au cas où l'écran est loin par rapport à l'espacement entre les trous : on écrit  $D \gg e$ . En effet, on voit sur la figure 14(c) que le champ d'ondes est plus simple dans cette hypothèse que proche des trous.

Maintenant, on a plusieurs manières de procéder, mais dans tous les cas c'est une étape mathématique : il faut voir ça comme un problème de géométrie. En fait, c'est un calcul un peu compliqué et optionnel. Si vous n'êtes pas à l'aise avec la géométrie, vous pouvez passer en partie 3.3 en admettant la formule 6.

À première vue, la méthode la plus directe est d'appliquer le théorème de Pythagore. La longueur du rayon du haut est  $\ell_1 = \sqrt{(y - e/2)^2 + D^2}$  et celle du rayon du bas est  $\ell_2 =$



**Figure 15** – Astuce géométrique pour calculer la différence de marche pour les trous d'Young. (a) Les rayons se croisant sur un écran lointain émergent des trous presque parallèles. (b) Construction géométrique pour déterminer la différence de leurs longueurs.

$\sqrt{(y + e/2)^2 + D^2}$ , la différence est donc  $\Delta\ell = \sqrt{(y + e/2)^2 + D^2} - \sqrt{(y - e/2)^2 + D^2}$ . Le problème, c'est qu'il faut simplifier cette formule dans la limite  $D \gg e$ , ce qui n'a rien d'évident et qui nécessite des maths trop avancées. Pour éviter cette complication, on va utiliser une méthode géométrique un peu astucieuse.

Si  $D \gg e$ , les rayons qui atteignent le point M émergent des trous quasiment parallèles (figure 15(a)). On peut le montrer précisément : définissons  $\theta_1$  comme l'angle que fait le rayon  $T_1M$  avec l'horizontale, et  $\theta_2$  de la même manière pour le rayon  $T_2M$ . On sait que  $\tan(\theta_1) = (y - e/2)/D$  et  $\tan(\theta_2) = (y + e/2)/D$ . Ainsi,  $\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1) = e/D \ll 1$  : les tangentes des angles sont très proches, donc les angles eux-mêmes sont très proches. Les deux rayons sont donc quasiment parallèles, comme on a dessiné en figure 15(b) en zoomant proche des trous. Par la suite on considèrera que  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$ , où  $\theta$  est défini par  $\tan(\theta) = y/D$ .

Comme les rayons sont presque parallèles, la distance entre  $T_1$  et l'écran est presque la même que la distance entre P et l'écran<sup>5</sup>. La différence de longueur entre les rayons vaut donc  $\Delta\ell \approx T_2P$ . Par report d'angles, on a  $\widehat{T_2T_1P} = \theta$ , d'où  $T_2P = T_1T_2 \sin(\theta)$ .

Pour simplifier cette formule, on peut alors utiliser l'*approximation des petits angles*. C'est une approximation très utile, qu'il faut retenir, qui assure que quand un angle  $\theta$  est petit, on a  $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$  et  $\tan(\theta) \approx \theta$ . Ici, en faisant l'hypothèse qu'on regarde des points sur l'écran qui sont proches du centre, dans le sens où  $D \gg y$ , on a  $\theta \ll 1$  et on peut utiliser l'approximation des petits angles. On a donc d'une part  $\tan(\theta) = y/D \approx \theta$  et d'autre part  $T_2P = T_1T_2 \sin(\theta) \approx T_1T_2\theta \approx T_1T_2y/D$ .

En utilisant la définition de  $e$ ,  $e = T_1T_2$  et le fait que l'indice optique de l'air est proche de 1, on a donc  $\delta = n_{\text{air}}\Delta\ell \approx \Delta\ell$ , soit

$$\delta \approx ey/D. \quad (6)$$

C'est une astuce un peu compliquée, mais elle peut être utile de temps en temps dans de situations similaires.

### 3.3 Figure d'interférence

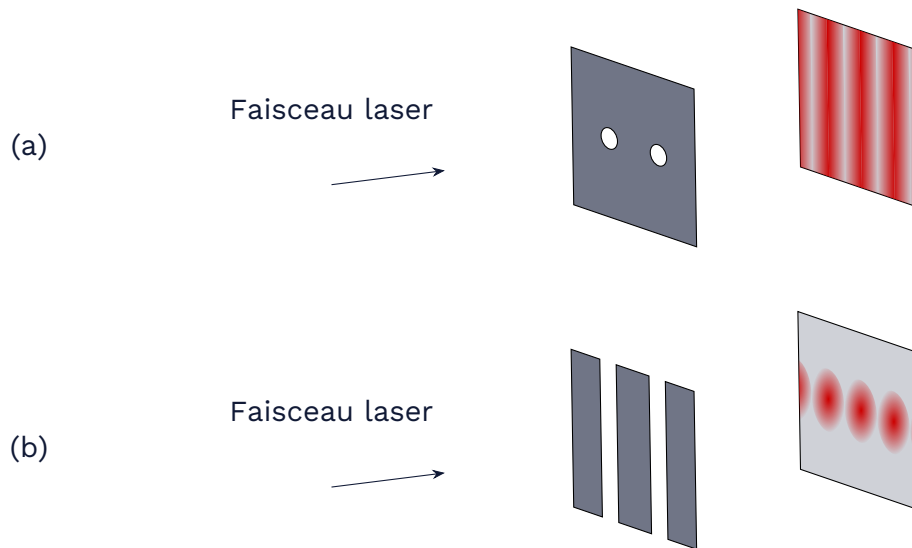
Revenons à la physique. Les ventres sur l'écran sont localisés aux positions  $y$  telles que  $\delta = ey/D = m\lambda$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ , soit  $y = m\lambda D/e$ . Les nœuds sont localisés aux positions  $y$  telles que  $\delta = ey/D = (m + \frac{1}{2})\lambda$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . Entre les nœuds et les ventres, l'intensité varie continuellement : la figure d'interférence sur l'écran est représentée en figure 14(b) et est donc constituée d'une

5. Ce n'est peut-être pas facile à voir « intuitivement ». Voici un argument plus précis. Considérons le cercle centré en M et passant par  $T_1$  : en zoomant proche des trous, il apparaît quasiment droit et se confond avec le segment  $T_1P$ . Comme tous ses points sont à égale distance de M, on sait que la différence de longueur des rayons vaut  $\Delta\ell \approx T_2P$ .

succession de taches lumineuses séparées par des taches sombres. Sur cette figure, on a défini l'*interfrange* comme la distance entre deux ventres,  $i = \lambda D/e$ .

Alternativement, on peut formuler le résultat en termes d'angles : puisque  $\theta \approx y/D$  et  $\delta \approx ey/D$ , on trouve  $\delta \approx e\theta$ . Ainsi, dans la limite  $D \gg e, y$ , la différence de marche est indépendante de  $D$  lorsqu'on l'exprime en fonction de  $\theta$ . Quand  $\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda/e$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , on observe uniquement des nœuds : cela correspond aux lignes blanches sur la figure 14(c). Les nœuds sont donc d'autant plus espacés et visibles que  $e$  est faible : on observera de belles interférences pour  $e$  de l'ordre de  $\lambda$ . Ainsi, on ne peut pas négliger la longueur d'onde devant les autres grandeurs du système quand on veut prendre en compte les phénomènes ondulatoires !

Nous venons de décrire le montage des trous d'Young dans le monde bidimensionnel d'un schéma sur une feuille. Dans la vraie vie tridimensionnelle, si l'écran est percé de deux trous circulaires, on observera des *franges* d'interférence : chaque tache que nous avons décrite en 2D sera en fait une bande verticale. C'est dû au fait que les trous, étant très petits, diffusent la lumière dans toutes les directions, et éclairent donc l'écran uniformément dans la direction perpendiculaire aux trous (figure 16(a)).



**Figure 16** – Croquis en trois dimensions. (a) Trous d'Young. (b) Fentes d'Young.

Un peu contre-intuitivement, si on remplace les trous par des fentes verticales, on n'observera plus sur l'écran des fentes mais des taches, dont la hauteur correspond à la taille du faisceau laser incident (figure 16(b)). Ces résultats seront à mettre en relation avec les notions qualitatives qu'on présentera à propos de la diffraction en partie 5.

Une remarque s'impose sur la conservation de l'énergie. D'une manière générale, les interférences ne détruisent pas d'énergie ni n'en créent. Elles permettent uniquement de prédire les directions où une onde parvient à se propager, et les directions dans lesquelles les interférences destructives empêchent la propagation. Mais si des interférences sont destructives à un endroit, elles seront généralement constructives à un autre endroit, comme on le voit avec les trous d'Young : il est impossible de magiquement « effacer » l'énergie de l'onde incidente, à moins de l'absorber dans un matériau sous forme de chaleur.

Les trous d'Young (1801) revêtent une importance historique particulière, puisque ce furent une des premières expériences permettant de mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière : il était inenvisageable d'expliquer autrement la figure d'interférence observée, malgré l'ignorance des liens entre lumière et électromagnétisme.

## 4 Ondes stationnaires

### 4.1 Corde de Melde

Un autre exemple fondamental d'interférences se produit lorsqu'une onde est réfléchiée par une paroi. Alors, l'onde réfléchiée peut interférer avec l'onde incidente. Une implémentation expérimentale classique de cette situation est la corde de Melde<sup>6</sup>.

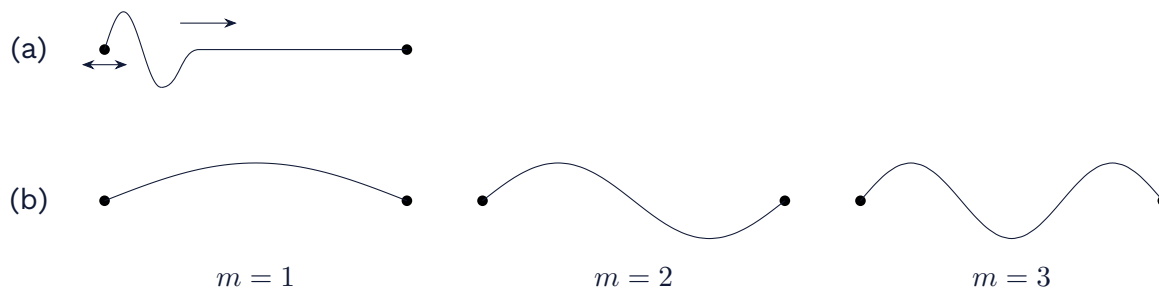
Lorsqu'on tend une corde entre deux points, comme une corde de guitare, une onde peut s'y propager : en effet, si une portion de la corde est déformée, la tension agira pour la rendre droite mais la déformation se propagera à la corde alentour, entraînée par son inertie.

La corde de Melde est un montage où une corde tendue est fixée à ses deux extrémités et secouée sinusoïdalement à l'une d'entre elles. Une onde se propagera donc depuis l'extrémité forcée sinusoïdalement puis se réfléchira contre l'extrémité tendue. La corde est ainsi le lieu de la superposition entre l'onde incidente et l'onde réfléchiée : on peut appliquer notre méthode habituelle et calculer la différence de marche.

Il y a toutefois deux subtilités. Premièrement, pour le moment on n'a pas appris à calculer une différence de marche en prenant en compte les réflexions. Il faudra donc compléter la formule qu'on utilisait jusque là pour le chemin optique.

Secondement, comme les deux extrémités sont fixées, l'onde réfléchiée peut à nouveau se réfléchir en atteignant l'autre extrémité, et rebondir ainsi encore et encore d'un côté à l'autre de la corde. Ce n'est pas un cycle qui se poursuivra pour toujours : physiquement, ce phénomène est limité puisque de l'énergie est perdue à chaque réflexion. Mais c'est embêtant pour traiter le problème simplement.

Dans la suite, on se contentera d'étudier la superposition de l'onde incidente et de la première réflexion. Cependant, pour que cette approximation soit réaliste, il faudra imposer que les deux extrémités de la corde soient des nœuds : ce doit être le cas puisqu'elles sont fixées, mais ce n'est pas automatique dans le calcul si l'on néglige les réflexions supplémentaires.



**Figure 17** – Corde de Melde. (a) Schéma du montage. (b) Forme de l'onde à résonance pour quelques valeurs de  $m \in \mathbb{N}^*$ . L'onde est « stationnaire » : la perturbation est toujours nulle aux nœuds et oscille à la fréquence  $f$  entre ceux-ci (la corde n'est pas immobile!)

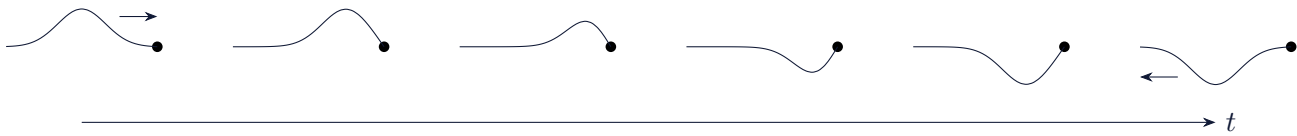
### 4.2 Chemin optique dans le cas d'une réflexion

Lorsqu'une onde se réfléchit, un maximum peut devenir un minimum (figure 18). Pour une onde harmonique, inverser les maxima et les minima revient à décaler l'onde de  $\lambda/2$ . Dans le calcul du chemin optique, il faut donc ajouter  $\lambda/2$  par réflexion.

En tout cas, c'est vrai pour une onde sur une corde qui se réfléchit à son extrémité. C'est aussi vrai pour de la lumière qui se réfléchit contre un miroir. Si la réflexion se fait à l'interface

6. Melde (1832 – 1901) était un physicien allemand et musicien amateur qui s'intéressa au comportement d'une corde dans l'expérience éponyme.





**Figure 18** – La réflexion d’une onde sur une corde change son signe.

avec un milieu dans lequel l’onde peut se propager (air/eau...), il n’y a pas toujours cette inversion. Elle est présente quand le milieu contre lequel l’onde se réfléchit a un indice optique supérieur au milieu de l’onde incidente. Dans tous les cas, il n’y a jamais d’inversion pour une onde transmise : seulement pour une onde réfléchie.

On peut rajouter cette remarque dans notre méthode pour calculer un chemin optique. La différence de marche, quant à elle, vaut toujours la différence des chemins optiques.

### Méthode 3 : Calculer un chemin optique en présence de réflexions

Pour calculer le chemin optique d’un rayon, on fait la somme de la longueur du rayon dans chaque milieu multiplié par l’indice de réfraction de ce milieu. Puis, on ajoute une demi longueur d’onde pour certaines réflexions.

Ainsi, on a

$$\mathcal{L} = n_a \ell_a + n_b \ell_b + \dots + (\lambda/2) \times \left( \begin{array}{l} \text{réflexions contre un miroir} \\ \text{ou un milieu d'indice supérieur} \end{array} \right). \quad (7)$$

## 4.3 Calcul de la différence de marche

On s’intéresse à la différence de marche entre les deux ondes atteignant la position  $x$  sur la corde de longueur  $L$ . La première onde, excitée depuis l’extrémité gauche située en  $x = 0$ , a parcouru une longueur  $\ell_1 = x$ . La seconde a parcouru toute la longueur de la corde puis est revenue jusqu’à  $x$  :  $\ell_2 = L + (L - x)$ . Comme il n’y a pas de changement de milieu au cours de cette propagation mais qu’il y a une réflexion, la différence de marche est égale à  $\delta = \ell_2 - \ell_1 + \lambda/2 = 2(L - x) + \lambda/2$  où  $\lambda$  est la longueur d’onde.

Ainsi, il y aura des nœuds là où  $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , soit  $L - x = m\lambda/2$ . Notons qu’on peut ici se limiter à  $m \in \mathbb{N}$  comme  $\lambda$  et  $L - x$  sont positifs. Par construction, l’extrémité gauche est toujours un nœud ( $x = L$ ). Cependant, il faut imposer que l’extrémité droite soit aussi un nœud :

$$L = m\lambda/2, m \in \mathbb{N}^*. \quad (8)$$

Cette condition est appelée *condition de résonance*, et s’exprime de manière équivalente sur la fréquence de l’excitation :

$$f = f_m, \text{ où } f_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

avec  $c$  la célérité de l’onde.

Si cette condition n’est pas vérifiée, on ne peut pas légitimement oublier les réflexions de l’onde sur l’extrémité droite, et la superposition des nombreuses ondes provenant de chaque réflexion, déphasées les unes par rapport aux autres, créera un motif désordonné et fluctuant. En revanche, à résonance, c’est-à-dire pour  $f = f_m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , on observera une belle figure

d'interférence (figure 17(b)) puisque les réflexions successives auront la même forme que l'onde initiale. Les nœuds seront situés en les positions  $x$  telles que  $L - x = m'\lambda/2$  où  $m' \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $L - x = m'L/m$  en utilisant la condition de résonance. Puisque  $0 \leq x \leq L$ , il y a donc  $m + 1$  nœuds en comptant les extrémités. Les ventres seront alors situés entre les nœuds, et on comprend la figure 17(b).

Sur cette figure, l'interprétation de la condition de résonance est claire : la longueur de la corde doit pouvoir être divisée en un nombre entier de demi longueurs d'onde. Faire un dessin est le moyen le plus simple pour établir rapidement la formule  $L = m\lambda/2$ .

## 4.4 Spectre et conséquences

**Notion de spectre** À résonance, on dit que l'onde sur la corde de Melde est une *onde stationnaire* : elle oscille dans le temps avec une amplitude qui dépend de la position plutôt que d'avancer dans une direction. Par opposition, toutes les ondes qu'on a considéré jusqu'ici peuvent être qualifiées d'*ondes progressives*, puisqu'elles se propagent. Autrement dit, on a montré que la superposition de deux ondes progressives se propageant dans des sens opposés donne une onde stationnaire.

La forme de l'onde  $f = f_m$  pour une valeur de  $m \in \mathbb{N}^*$  donnée est appelée un *mode propre* de l'onde, et la fréquence  $f_m$  associée est une *fréquence propre*. L'ensemble des fréquences propres de la corde est appelé le *spectre* de la corde. La fréquence la plus basse,  $f_1 = c/2L$ , est appelée la *fréquence fondamentale*, et les autres sont des *harmoniques*.

Quand on frappe une corde de guitare, on constate que du son est émis aux différentes fréquences propres : on peut comprendre ce phénomène en se rappelant qu'une fréquence hors résonance donne lieu à des oscillations désordonnées de la corde, et que **seules les fréquences propres** sont susceptibles de créer des motifs stationnaires qui peuvent transmettre leurs vibrations au son environnant.

La hauteur du son entendu correspondra à la fréquence fondamentale. La fréquence des harmoniques et leurs intensités déterminent le *timbre* de la guitare. Le concept de mode propre s'étend à beaucoup d'autres systèmes qu'une corde tendue : il est pertinent dès lors qu'on piège une onde dans un domaine d'où elle ne peut s'échapper. Ainsi, les tambours, caisses de résonance, cymbales et autres triangles ont tous des modes propres, mêmes s'ils sont sensiblement plus compliqués que ceux d'une corde de guitare. Le timbre de tous ces instruments est donc déterminé par leur spectre !

**Instruments à vent simples** En fait, on peut même étendre cette analyse aux instruments à vent (flutes...) mêmes s'ils peuvent laisser l'air s'échapper. Dans leur cas, l'onde considérée est une onde acoustique. Jusqu'à présent, notre onde se propageait sur une corde dont les deux extrémités étaient fixées : on parle de conditions aux bords « fermé – fermé ». Ainsi les deux extrémités étaient forcément des nœuds.

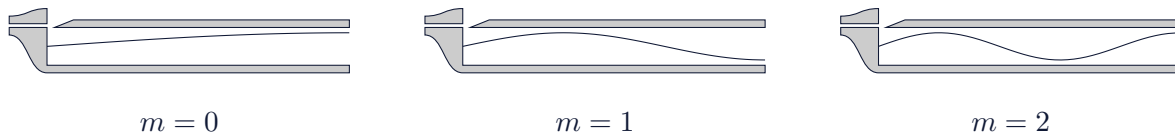
Ce n'est pas le cas d'une flute. Dans une grossière approximation, une flute à bec a des conditions aux bords « fermé – ouvert » : d'un côté de la flute, là où on met la bouche, le trou est tout petit et l'air ne peut pas s'échapper (extrémité fermée). De l'autre côté, en revanche, la flute est ouverte sur l'air ambiant (voir figure 19) : du point de vue de l'onde acoustique qui se crée dans la flute, ce n'est pas un nœud !

En fait, on peut se convaincre que c'est un ventre. En voici une explication rapide (ce n'est pas nécessaire de la comprendre) : le contact avec l'air ambiant fixe la valeur de la pression à la sortie de la flute. Or, une onde acoustique est constituée d'une alternance entre régions de forte pression où le fluide est à l'arrêt, et régions de grands mouvement du fluide. En effet, la pression importante pousse le fluide sur les côtés, qui accélère donc et crée une nouvelle

zone de haute pression en se comprimant plus loin. Dans ce modèle naïf, fixer la pression à la pression extérieure revient donc à imposer que l'on se trouve dans une zone de grands mouvements du fluide, soit un ventre.

Avec ces conditions aux bords différentes (un nœud d'un côté, un ventre de l'autre), le jeu pour trouver les modes propres change. En figure 17, il fallait faire rentrer un nombre entier de demi longueurs d'onde entre les deux extrémités pour que ce soient des nœuds. Ici, il faut rajouter un quart de longueur d'onde pour que la sortie soit un ventre. La condition de résonance est donc  $L = m\lambda/2 + \lambda/4$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ( $m = 0$  est permis!) et le spectre est constitué des fréquences

$$f_m = \frac{(m + 1/2)c}{2L}, m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$



**Figure 19** – Quelques modes propres d'une flute idéalisée.

## 5 Obstacles aux interférences

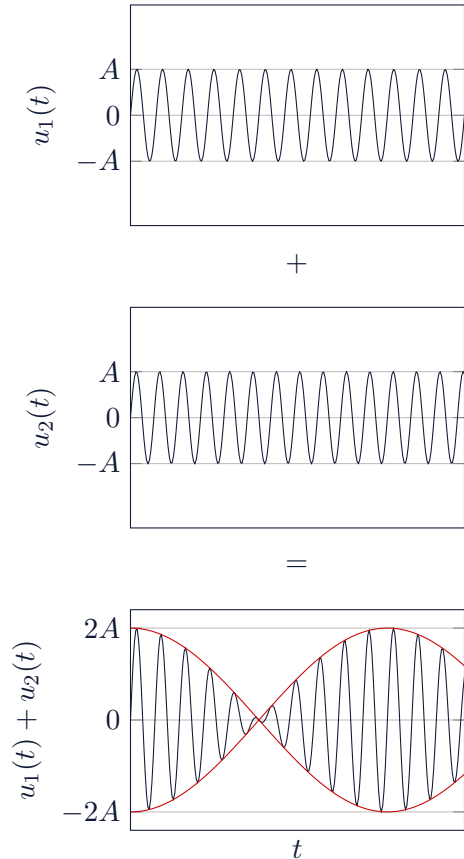
Pour finir, on va voir quelques raisons pour lesquelles observer des interférences peut être compliqué en pratique. Ces raisons sont aussi des phénomènes dignes d'intérêt en eux-mêmes !

### 5.1 Battements

**Principe** Si on voulait faire des **interférences avec deux sources d'ondes** différentes (par exemple deux lasers différents plutôt qu'un seul laser dont le rayon emprunte deux chemins différents), il faudrait s'assurer que leurs **fréquences soient égales** : voyons ce qu'il se passe si ce n'est pas le cas.

Déjà, on peut comprendre pourquoi on n'observera pas d'interférences quand la fréquence  $f_1$  d'une des ondes est différente de celle de l'autre onde  $f_2$ . En regardant la figure 11, on se rappelle qu'on observe des interférences constructives quand les maxima des deux ondes apparaissent aux mêmes instants, et des interférences destructives quand les maxima de l'une apparaissent aux mêmes instants que les minima de l'autre. Mais si les fréquences sont différentes, les maxima des deux ondes finiront forcément par se décaler ! C'est comme si on augmentait constamment la différence de marche au cours du temps.

Plus précisément, reprenons le principe de superposition avec deux ondes de même amplitude mais de fréquences différentes  $f_1$  et  $f_2$ . Si ces fréquences sont proches, le résultat de la somme est montré en figure 20. Puisque  $|f_1 - f_2|$  est faible par rapport à  $f_1$  et  $f_2$ , les ondes restent longtemps quasiment en phase et interfèrent constructivement. Mais, au bout d'un moment, elles se décalent suffisamment pour être en opposition de phase : elles interfèrent alors destructivement. Ces étapes de coïncidence de phase puis d'opposition de phase s'alternent, et confirme notre scénario intuitif : tout se passe comme si la différence de marche augmentait constamment avec le temps. On dit que superposer deux ondes de fréquences différentes donne lieu à des *battements*.



**Figure 20** – Lorsqu'on superpose deux ondes de fréquences proches mais différentes, des battements apparaissent. L'enveloppe est tracée en rouge.

**Fréquence des battements** En bas de la figure 20, on voit que les battements ressemblent à une sinusoïde de fréquence rapide, comparable à  $f_1$  et  $f_2$ , dont l'amplitude varie lentement au cours du temps. On dit que la fréquence rapide, qui se trouve valoir  $(f_1 + f_2)/2$ , est la fréquence *porteuse*, et que l'amplitude est *modulée* par une *enveloppe*, tracée en rouge en figure 20.

La période de l'enveloppe est le temps entre deux minima d'amplitude. Elle vaut

$$f_{\text{battements}} = |f_2 - f_1|. \quad (11)$$

Si les deux ondes considérées sont des ondes acoustiques dont les fréquences sont perceptibles par l'oreille humaine, on entendra ainsi une note dont le volume oscille avec le temps, et s'annule périodiquement. Le temps entre deux annulations est  $1/f_{\text{battements}}$ .

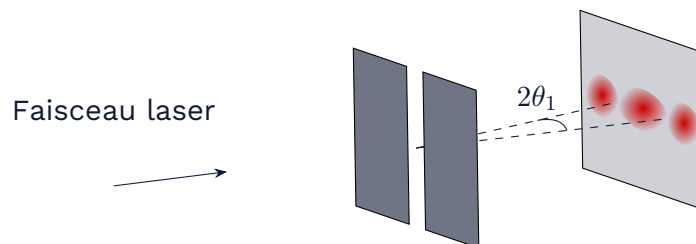
## 5.2 Diffraction

Parlons maintenant brièvement de diffraction. En quelque sorte, la diffraction c'est des interférences avec une seule fente d'Young. Mais s'il n'y a qu'une seule fente, comment peut-il y avoir plusieurs chemins différents pour l'onde ? L'idée, c'est que cette fente a une certaine largeur : les rayons ont pu passer par n'importe quel point dans l'ouverture, et si deux rayons étant passés par deux points différents se rencontrent, ils pourront interférer.

La différence de marche accumulée dans ce scénario est plus faible que celle entre les rayons étant passés par chaque fente dans le montage des fentes d'Young. Intuitivement, on comprend qu'elle est régie par l'ordre de grandeur de la largeur de la fente,  $a$ . Si cette largeur est beaucoup plus faible que l'espacement entre les fentes,  $e$ , on pourra observer correctement la figure d'interférence. Sinon, la figure due aux interférences entre les deux fentes d'Young sera combinée avec la figure due à la diffraction par chaque fente.

Cette figure ressemble à celle des fentes d'Young : certaines directions sont le lieu de nœuds, d'autres le lieu de ventres (figure 21), mais les distances entre ventres successifs ne sont pas régulières comme pour les fentes d'Young. On peut montrer (c'est compliqué !) la formule suivante donnant la valeur de l'angle auquel on observe le premier nœud :

$$\sin(\theta_1) = \lambda/a. \quad (12)$$



**Figure 21** – Diffraction par une fente.

On avait montré en section 3 que l'angle du premier nœud dû aux trous d'Young vaut  $\lambda/2e$ . Ce résultat confirme quantitativement notre remarque qualitative : si  $a \ll e$ , alors on pourra observer une belle figure d'interférence due aux trous d'Young sans avoir à se soucier de la diffraction.

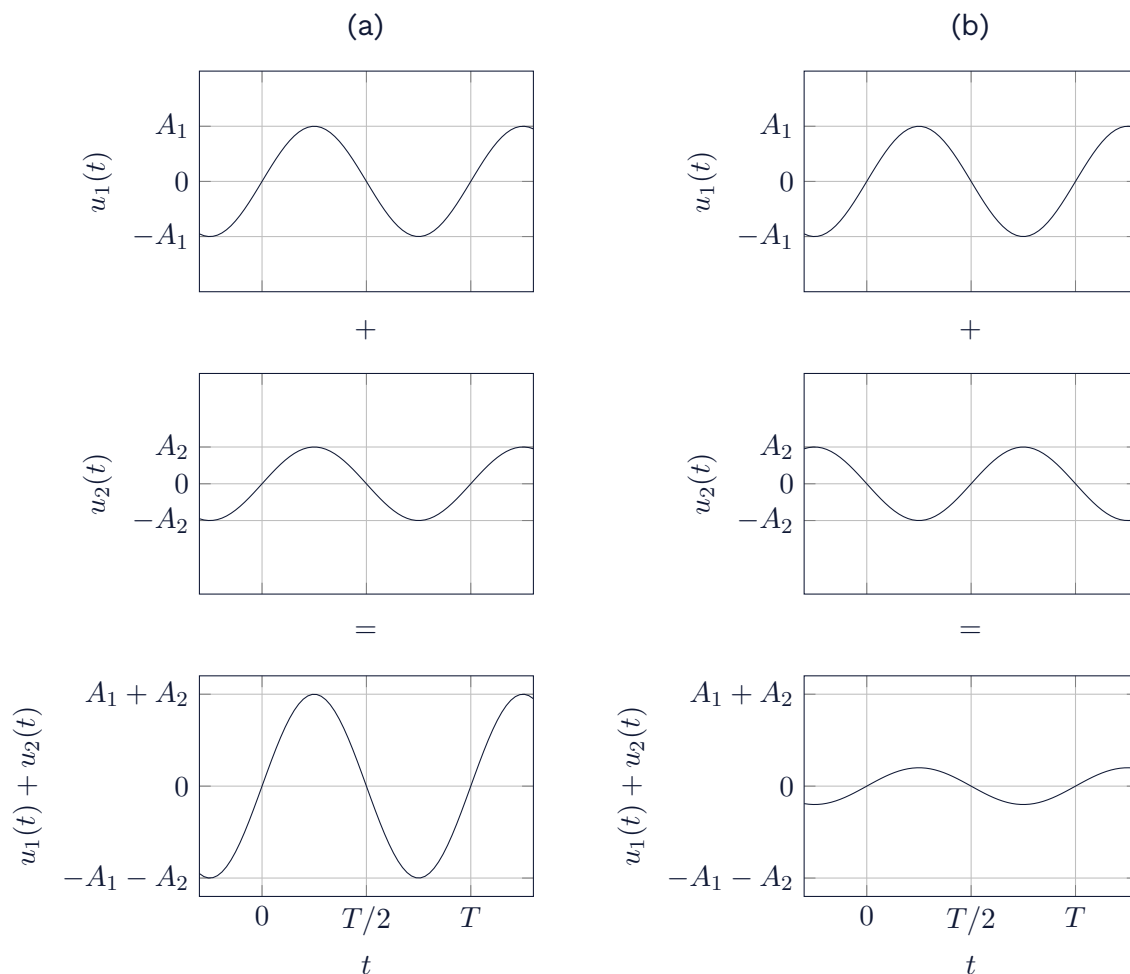
La diffraction n'est pas un phénomène limité aux fentes : en fait, n'importe quel obstacle diffracte les ondes qui le rencontrent. La forme de la figure de diffraction changera selon la forme de l'obstacle, mais le principe reste le même. Un principe important à retenir, c'est que la figure de diffraction **respecte les symétries** de l'obstacle : par exemple, un obstacle triangulaire donnera une figure qui a les mêmes symétries qu'un triangle. En fait, on peut même se servir de ce principe pour déduire la forme de l'objet diffractant lorsqu'il est inconnu : c'est ainsi qu'a été déterminée pour la première fois la forme en double hélice de la molécule d'ADN en 1953 !

L'équation 12 n'est valable rigoureusement que dans le cas d'une fente, mais elle donne toujours le bon ordre de grandeur de  $\theta_1$  même pour d'autres obstacles. La diffraction est la plus notable quand l'angle du premier nœud est d'ordre 1, donc lorsque la taille de l'objet est de l'ordre de la longueur d'onde. Mais même lorsque l'objet diffractant est bien plus grand que

la longueur d'onde, on peut observer la diffraction : par exemple, la Lune diffracte la lumière des étoiles visibles juste au bord de celle-ci dans le ciel. Certes, l'angle du premier nœud est très faible, mais comme la Terre est très loin de la Lune, on peut quand même en mesurer les effets !

### 5.3 Autres obstacles

**Contraste** Toutes les interférences que l'on a considérées jusqu'à maintenant se produisaient entre deux ondes de même amplitude. Mais dans la vraie vie, il est probable que ce ne soit pas exactement le cas : les deux ondes peuvent avoir une intensité optique ou sonore légèrement différentes.



**Figure 22** – Superposition de deux ondes d'amplitudes différentes. (a) Interférence constructive. (b) Interférence destructive.

Sur la figure 22, on voit que quand les ondes n'ont pas la même amplitude, les interférences destructives ne donnent pas une onde d'amplitude nulle, mais plutôt d'amplitude faible. Ainsi, par exemple, lors d'une expérience des trous d'Young, si un trou est un peu plus grand que l'autre et laisse donc passer plus de lumière, les franges sombres ne seront pas totalement dénuées de lumière. On dit que le *contraste* est réduit par rapport au cas où les deux ondes ont la même amplitude.

Le même principe est par exemple valable pour des battements : lorsque les ondes n'ont

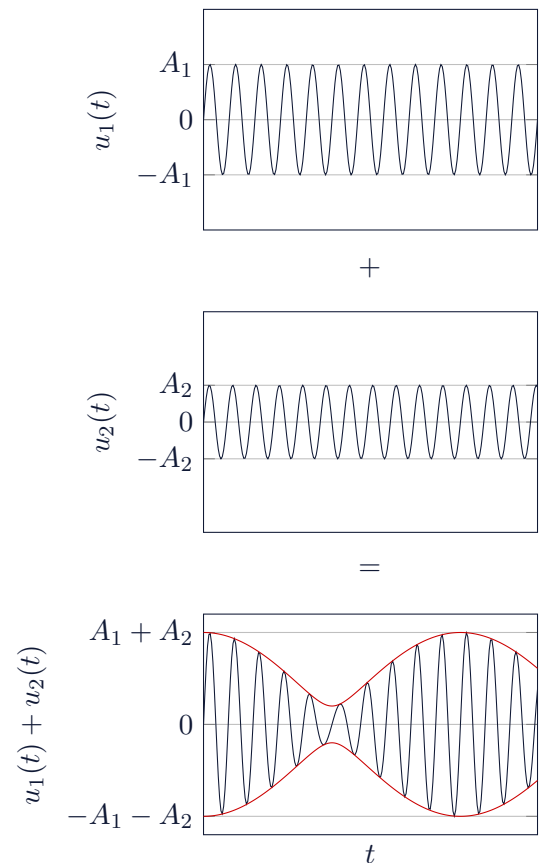
pas la même amplitude, l'enveloppe des battements ne va pas jusqu'à zéro (voir figure 23).

**Cohérence** Finalement, comme on a évoqué plus haut la notion de cohérence, voyons en quelques mots sa signification qualitative (pour la culture seulement).

Si on pense à une ampoule qui envoie de la lumière dans toutes les directions, il serait illusoire de se dire que le champ d'onde résultant ressemble vraiment à celui de la figure 8. Ce qu'on voit sur la figure est une idéalisation, mais en réalité l'émission de lumière par l'ampoule est un processus qui résulte de la haute température du filament dans l'ampoule, et de l'agitation microscopique qui y correspond. En gros : puisque les atomes du filament bougent dans tous les sens, ils « secouent » le champ électromagnétique autour d'eux et envoient des ondes lumineuses comme on enverrait des ondes sur un drap qu'on secoue avant de le plier.

Mais ce processus est compliqué et globalement aléatoire ! Plutôt que d'envoyer un champ très régulier comme celui de la figure 8, qui serait dû à une *source cohérente*, le champ envoyé par une ampoule est constitué de plein de domaines qui ressemblent chacun à un morceau de la figure 8 mais qui sont déphasés entre eux de manière aléatoire. On appelle chacun de ces domaines un *train d'ondes*. On comprend qu'il ne peut y avoir d'interférences qu'au sein d'un de ces domaines. Sinon, le déphasage aléatoire entre deux trains d'ondes s'ajoutera au déphasage dû à la différence de marche dans un montage d'interférences et empêchera d'observer correctement la figure d'interférence.

Un laser est une source **beaucoup plus cohérente** qu'une ampoule. On ne peut pas dire qu'il envoie une seule onde plane pendant toute sa durée de fonctionnement, mais les trains d'ondes durent beaucoup plus longtemps et sont donc beaucoup plus grands. Par conséquent, c'est plus facile expérimentalement d'avoir une belle figure d'interférence en utilisant un laser.



**Figure 23** – Battements avec deux ondes d'amplitudes proches mais pas égales.



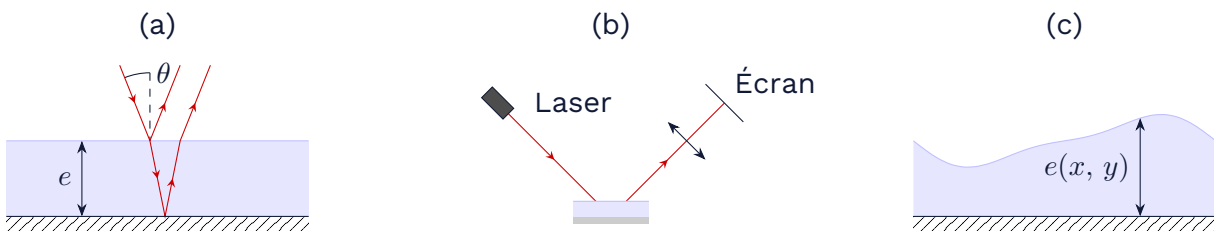
## 6 Films minces

Cette partie est en bonus. Même si elle est techniquement au syllabus du test de présélection des olympiades, son sujet est un peu désuet et n'a pas fait l'objet d'une seule question pour les terminales depuis plus de dix ans. Mais elle constitue une belle application de ce qu'on a appris jusque là !

### 6.1 Films minces en lumière monochromatique

**Présentation** On va voir un nouvel exemple d'interférences, basé sur la réflexion d'une onde tout comme la corde de Melde. Ce coup-ci cependant, on ne confinera pas la propagation de l'onde dans un domaine fini : il n'y aura pas d'histoire de modes propres.

On dépose une fine couche d'un milieu (eau, verre, huile...) sur une surface plane réfléchissante : on parle de *film mince*. En éclairant cette surface depuis le haut, une partie de la lumière est directement réfléchi par le film. Une autre partie est transmise mais se réfléchit contre le fond avant de ressortir du film (figure 24(a)). L'onde s'étant réfléchi contre le fond peut à nouveau se réfléchir contre la surface et rebondir plusieurs fois à l'intérieur du film, mais on néglige l'amplitude de ces réflexions supplémentaires et on se limite aux deux rayons dessinés sur la figure. Dans la pratique, cette hypothèse est vérifiée pour des raisons différentes selon la situation précise considérée : on ne rentrera pas plus dans les détails.



**Figure 24** – (a) Éclairage d'un film mince uniforme. Pour chaque rayon incident, deux rayons émergent du système : un rayon réfléchi par la surface du film et un rayon réfléchi par le fond du film. (b) Montage expérimental pour l'observation des interférences dues à un film mince. (c) Film mince d'épaisseur variable. L'axe  $x$  est l'axe horizontal, et l'axe  $y$  va en profondeur dans le schéma (il est perpendiculaire à l'axe  $x$  et à la direction dans laquelle est mesurée l'épaisseur  $e$ ).

Comme on voit sur la figure, les deux rayons émergent parallèles. Si on veut les faire interférer, il faut les amener au même point. Une façon de faire ça, c'est de mettre une lentille à la sortie du film comme en figure 24(b) pour focaliser les rayons sur un écran. Comme ça, les deux rayons atteignent le même point et on observera leur interférence sur l'écran. Dans la pratique, c'est un peu ce que fait notre œil lorsqu'il accomode pour regarder le film : si on veut juste observer les interférences sans faire de mesure précise, on peut donc directement regarder le film !

**Calcul de la différence de marche** Partons donc sur notre méthode habituelle de calculer la différence de marche.

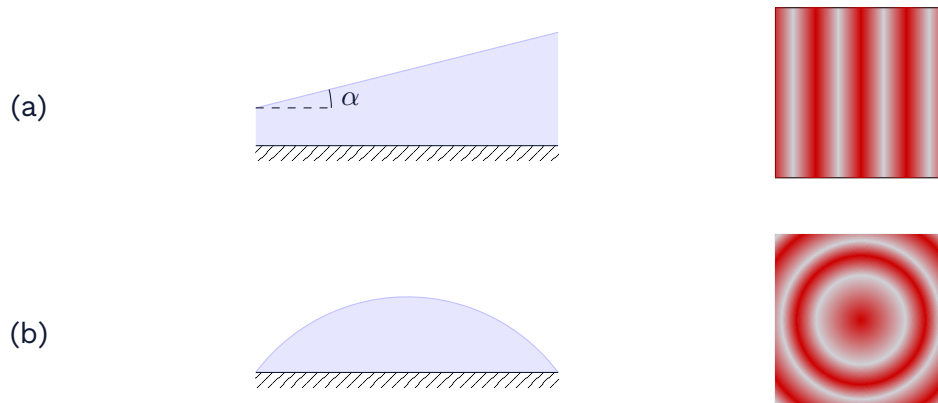
On va se limiter à un cas simple, celui de l'*incidence normale*, c'est-à-dire quand  $\theta = 0$  sur la figure 24(a). Bien sûr, c'est un cas compliqué à observer expérimentalement puisque la lumière est renvoyée exactement dans la direction d'où elle vient mais les calculs sont beaucoup plus faciles et donnent une bonne idée du résultat pour une valeur quelconque de  $\theta$ . En incidence normale, les rayons partagent leur trajet dès qu'ils sont ressortis du film : la

différence de marche est donc seulement due à l'aller-retour du rayon ayant pénétré dans le film. En prenant en compte son indice optique  $n$ , elle vaut ainsi  $\delta = 2ne$  (chacun des rayons subit un déphasage de  $\pi$  lors de sa réflexion, qui se compensent donc).

Quand on envoie un laser sur le film, chacun des rayons du laser se scinde en deux rayons qui parcourent des trajets similaires : la différence de marche accumulée est la même partout et l'intensité observée sur l'écran est donc uniforme. Par exemple, si  $\delta = m\lambda$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , l'écran entier sera un ventre et l'intensité y sera maximale, et si  $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , l'écran entier sera un nœud et l'intensité y sera nulle.

On peut rendre ce comportement plus intéressant en considérant des films dont l'intensité varie en fonction de la position (figure 24(c)). Si cette variation est suffisamment douce, c'est-à-dire si  $e(x, y)$  ne varie pas beaucoup quand  $x$  ou  $y$  varient d'une distance de l'ordre de  $\lambda$ , on peut reprendre en chaque point le calcul précédent pour la différence de marche, qui vaut donc  $\delta = 2ne(x, y)$  pour un rayon qui atteint le film à la position  $(x, y)$ . Essayez de prédire la figure d'interférence qu'on observera alors !

**Figure d'interférence** La réponse, la voici. Pour mieux comprendre ce qui se passe, on peut considérer le cas particulier où la surface du film est plane mais penchée par rapport à son fond :  $e(x, y) = \tan(\alpha)x$ , où l'angle  $\alpha$  est défini en figure 25(a).



**Figure 25** – Figures d'interférences pour quelques formes de films minces. (a) Film en « coin » : plan incliné. (b) Film en forme de goutte.

Ainsi, la différence de marche vaut  $\delta = 2n \tan(\alpha)x$ . Comme dans le cas des trous d'Young, il s'agit d'une fonction linéaire de la position le long de l'écran : on observera alors à nouveau des franges lumineuses et sombres. Plus précisément, les franges lumineuses correspondent aux ventres, c'est-à-dire les positions sur l'écran dont la lumière a atteint le film en  $x = m\lambda/[2n \tan(\alpha)]$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ , et les franges lumineuses correspondent aux nœuds, c'est-à-dire les positions sur l'écran dont la lumière a atteint le film en  $x = (m + \frac{1}{2})\lambda/[2n \tan(\alpha)]$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . Si on regarde directement le film, la lentille et l'écran sont remplacées par notre œil et on voit directement la figure d'interférence sur le film : les franges seront alors espacées d'une distance  $i = \lambda/[2n \tan(\alpha)]$ , l'interfrange.

Quand  $e(x, y)$  n'est plus une fonction aussi simple, c'est-à-dire quand la surface du film est courbe, on n'observe plus des franges droites : les courbes tracées sur l'écran par les ventres et les nœuds ont des formes plus compliquées. Par contre, on sait toujours que chacune de ces courbes correspond à une valeur donnée de la différence de marche  $\delta$ , et donc de l'épaisseur  $e$  puisque  $\delta = 2ne(x, y)$ . Ce qu'on voit sur l'écran est donc une sorte de « carte topographique » de la surface du film, comme les cartes traçant les lignes de niveau de l'altitude d'une montagne.

Dans la figure 25(b), on a tracé la figure d'interférence lorsque le film est une goutte de liquide (la forme de sa surface est donc celle d'une portion de sphère). Puisque les courbes où la goutte a une épaisseur constante sont des cercles, on observe sur l'écran des anneaux lumineux et des anneaux sombres. Cette construction met en lumière un point important : on sait que la goutte admet une symétrie circulaire (elle est inchangée si on la tourne d'un certain angle autour de son centre), donc on en déduit que la figure d'interférence aura la même symétrie. Il faut toujours faire **attention aux symétries** des problèmes qu'on rencontre en physique : elles permettent souvent de déduire des informations précieuses sur la solution.

## 6.2 Interférences en lumière blanche

**Qu'est-ce que la lumière blanche ?** Pour le moment, on s'est uniquement intéressé à des interférences avec des ondes harmoniques. Comme on l'a dit, pour la lumière, ça correspond à des ondes monochromatiques, c'est-à-dire d'une seule couleur du spectre de la figure 4.

Mais sur ce spectre, il n'y a pas de blanc. Alors, de quoi est faite la lumière blanche ? La réponse, c'est qu'il s'agit d'une superposition d'ondes monochromatiques à **chacune des longueurs d'onde** du spectre visible. La lumière blanche, ce n'est pas une onde monochromatique !

Ce n'est pas évident du tout. À première vue, ça complexifie beaucoup notre travail pour comprendre les interférences, puisque la perturbation  $u$  n'est plus sinusoïdale, c'est une fonction super compliquée... Mais en fait, on va s'en sortir quand même grâce à notre étude des ondes harmoniques.

En effet, malgré le fait que toutes les couleurs soient mélangées dans la lumière blanche, notre œil est quand même capable de les distinguer. Il faut imaginer que chaque longueur d'onde évolue indépendamment des autres lorsqu'elle se propage dans l'espace ou qu'elle interfère, et qu'à la fin notre œil (ou le capteur d'une caméra) combine toutes les longueurs d'onde qu'il reçoit et forme la couleur correspondante : s'il reçoit toutes les longueurs d'onde, par exemple, on perçoit du blanc.

Finalement, on admet la propriété suivante, dont la preuve est hors du cadre de ce cours. *A posteriori*, ça confirme qu'il était pertinent d'étudier en détail les ondes harmoniques puisqu'elles servent de « briques fondamentales » pour construire des ondes plus compliquées.

### Propriété 3 : Synthèse additive des figures d'interférences

La superposition de plusieurs ondes harmoniques de fréquences différentes résulte en la somme de l'intensité due à chaque fréquence présente seule. En résumé, on peut calculer la figure d'interférence indépendamment pour chaque fréquence et sommer ensuite les intensités.

**Film mince en lumière blanche** Reprenons le cas d'un film mince dont la surface est un plan incliné (figure 25(a)) mais plutôt que de l'éclairer avec un laser, qui est une source de lumière monochromatique, éclairons-le avec de la lumière blanche. Pour savoir quelle est la figure d'interférence, on peut utiliser la synthèse additive.

Puisqu'on connaît la figure d'interférence correspondant à chaque longueur d'onde lorsqu'elle est présente seule, on peut les combiner pour obtenir la figure d'interférence correspondant à la lumière blanche. Toutes ces figures sont constituées de franges. Chaque longueur d'onde a une frange lumineuse en  $x = 0$ , puisqu'alors  $\delta = 0$ . En revanche, l'interfrange  $i = \lambda / [2n \tan(\alpha)]$  dépend de la longueur d'onde : les franges des différentes longueurs d'onde vont se décaler en fonction de  $x$ .

En figure 26, on a représenté les figures d'interférences de quelques couleurs présentes seules et la figure d'interférence en lumière blanche.

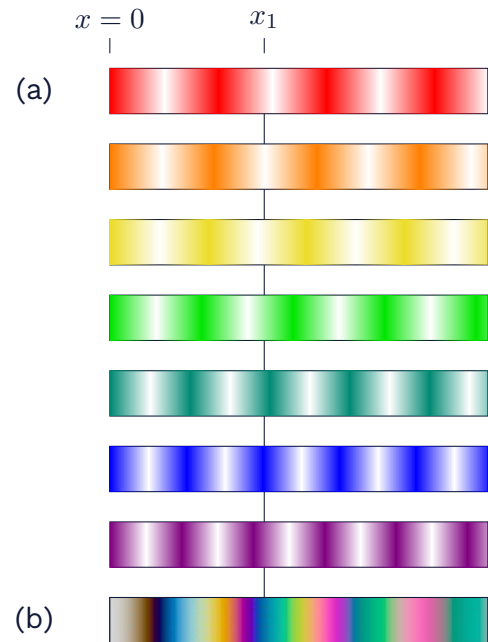
En  $x = 0$ , toutes les franges colorées se recombinent pour former du blanc mais plus loin, à la position notée  $x_1$  sur la figure, une frange lumineuse de chaque couleur bleutée coïncide à peu près avec une frange sombre de toutes les autres couleurs : la lumière observée sera donc bleue. D'une manière générale, il faut combiner la couleur de toutes les franges lumineuses présentes à une certaine position pour obtenir la couleur observée.

**Conséquences pratiques** La succession de couleurs observées dans ce montage est appelée *échelle des teintes de Newton*. Plus on considère des valeurs élevées de  $x$ , c'est-à-dire de  $\delta$ , plus deux longueurs d'ondes différentes sont décalées : ainsi, aux grandes valeurs de  $x$ , on voit des franges lumineuses pour des couleurs très variées, et la couleur résultante est de plus en plus pâle. Si on poursuivait l'axe horizontal de la figure 26, on verrait des teintes plus pastel, jusqu'à tendre vers le blanc à nouveau (on parle de *blanc d'ordre supérieur*).

Le principe général d'utiliser des interférences pour modifier la couleur observée en filtrant certaines longueurs d'ondes se retrouve dans la nature : c'est ce phénomène qui détermine la couleur des bulles de savon ou des ailes de papillon, par exemple. Les ailes de papillon ont des reliefs très précis à l'échelle micrométrique qui ne reflètent que certaines couleurs en utilisant des interférences !

Les interférences en lumière blanche sont aussi utiles à des fins expérimentales. Le domaine de l'*interférométrie* s'intéresse aux méthodes permettant de mesurer des distances très petites grâce à des interférences. Par exemple, on peut vouloir mesurer l'épaisseur d'un film mince. Sur la figure 26, on voit qu'il n'est pas possible de déduire l'épaisseur du film à partir d'une figure d'interférence monochromatique, puisque la même intensité apparaît périodiquement en fonction de l'épaisseur. Par contre, c'est possible en lumière blanche, puisqu'aucune couleur ne se répète !

C'est un peu stylé quand même.



**Figure 26** – Couleurs interférentielles. (a) Figures d'interférences pour quelques longueurs d'ondes. (b) Résultat de la recombinaison de toutes les couleurs, appelé échelle des teintes de Newton.